1 КОМПЛЕКС САНДАР

1.1 Комплекс сандар және оларға қолданылатын амалдар

Анықтама 1. *Комплекс сан* деп реттелініп алынған *x* және *y* нақты сандар жұбы аталады да, $z=(x,y)$ түрінде белгіленеді.

$z=(x,y)$ комплекс саны үшін *x* оның нақты бөлігі, ал *y* жорамал бөлігі деп аталады (белгіленулері: $x=\operatorname{Re}z$, француздың «reelle-нақты» сөзінен; $y=\operatorname{Im}z$, «imaginaire-жорамал» деген француз сөзінен алынған). $(0,0)$ - нөлдік комплекс сан.

Анықтамадан $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ сандары тек $x_1=x_2$ және $y_1=y_2$ болғанда ғана тең болатыны шығады:

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}.$$

Ескерту: Комплекс сандар үшін $z_1>z_2$ $(z_1<z_2)$ ұғымы жоқ.

Анықтама 2. Екі $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ комплекс сандарының қосындысы деп $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ санын айтамыз. Қосынды z_1+z_2 түрінде белгіленеді:

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \tag{1.1}$$

Анықтама 3. $z_1=(x_1,y_1)$ мен $z_2=(x_2,y_2)$ екі комплекс санының көбейтіндісі деп $(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$ санын айтамыз. Көбейтінді $z_1\cdot z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.2}$$

Комплекс сандарды қосу және көбейту амалдары нақты сандарды қосу және көбейту амалдары арқылы берілгендіктен олар қосу мен көбейту амалдарының барлық аксиомаларын қанағаттандырады. Атап айтсақ:

1) қосудың коммутативтілігі: $z_1+z_2=z_2+z_1$;
2) көбейтудің коммутативтілігі: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;
3) қосудың терімділігі: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;
4) көбейтудің терімділігі: $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;
5) көбейтудің қосуға қатысты үлестірімділігі: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Анықтама 4. $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ комплекс сандарының айырмасы деп $(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ санын айтамыз. Айырма z_1-z_2 түрінде белгіленеді:

$$z_1-z_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2). \tag{1.3}$$

Анықтама 5. $z_1=(x_1,y_1)$ санының $z_2=(x_2,y_2)\neq(0,0)$ санына қатынасы деп $\left(\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$ санын айтамыз. Қатынас $\dfrac{z_1}{z_2}$ түрінде белгіленеді:

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right),\ x_2^2+y_2^2\neq0. \tag{1.4}$$

Жорамал бөлігі нөлге тең, яғни $(x,0)$ санын қысқаша x деп, $(0,1)$ санын *i* деп белгілейміз, яғни $(x,0)=x$, $(0,1)=i$ деп ұйғарамыз. Комплекс сандарға амалдар қолдануда *i* санының орны ерекше.

Кез келген $z=(x,\mathrm{y})$ комплекс саны үшін

$$z=(x,\mathrm{y})=(x,0)+(0,\mathrm{y})=(x,0)+(y,0)(0,1)=x+i\mathrm{y}$$

теңдігі орынды, яғни $z=(x,\mathrm{y})$ комплекс санын *нақты x* пен *таза жорамал yi* сандарының қосындысы ретінде қарастыруға болады. z санының $x+iy$ түрінде жазылуын оның *алгебралық түрде* жазылуы дейміз.

Алғаш рет «*комплекс сан*» атауын К. Гаусс (1777-1855), ал *i* белгісін Л. Эйлер (1707-1783) енгізген.

Анықтама 3-ті негізге алып

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1,$$

яғни $i^2=-1$ болатынын көреміз. Осы теңдікті ескере отырып кез келген натурал k үшін келесі дәрежелерді айқындауға болады:

$$i^{4k}=\left(i^2\right)^{2k}=(-1)^{2k}=1,\quad i^{4k+1}=i^{4k}i=1\cdot i=i,$$

$$i^{4k+2}=i^{4k}i^2=1\cdot(-1)=-1,\qquad i^{4k+3}=i^{4k}i^2i=1\cdot(-1)\cdot i=-i.$$

Комплекс санының z=x+iy алгебралық түріндегі жазылуын пайдаланып, комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдарды көпмүшеліктерге қолдану ережелері бойынша жүргізуге болады.

Анықтама 6. Нақты бөліктері тең, ал жорамал бөліктері қарама-қарсы екі комплекс сандары *өзара түйіндес* деп атап,

$$\mathrm{z}=x+\mathrm{i}y,\ \overline{\mathrm{z}}=\mathrm{x}-\mathrm{i}y$$

түрлерінде белгілейміз.

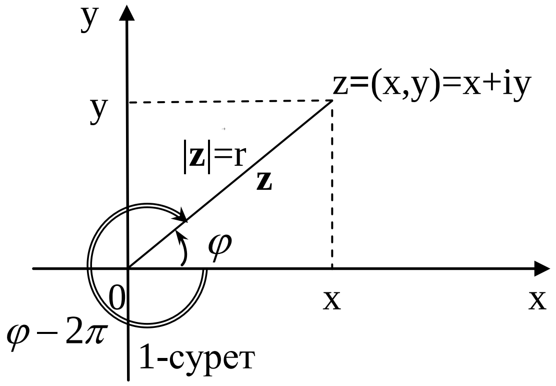
Анықтамадан

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2} \text{ және } \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

теңдіктері орынды болатыны шығады.

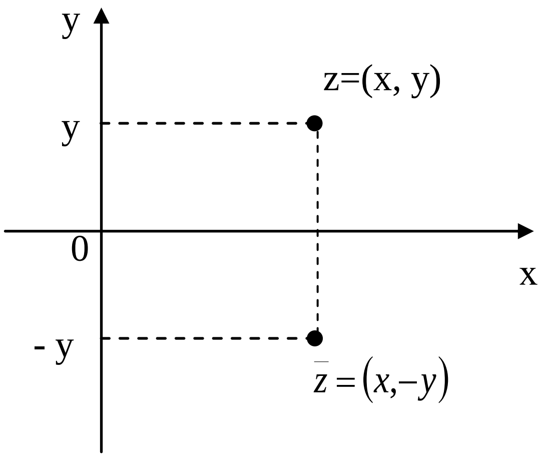
1.2 Комплекс сандардың геометриялық кескіні, модулі мен аргументі ұғымдары және тригонометриялық, көрсеткіштік пішіндері

Кез келген $\mathrm{z}=(x,y)=x+iy$ санын xOy жазықтығының (x,y) нүктесі немесе **z**={x,y} векторы ретінде қарастыруға болады. Мұндағы xOy жазықтығы *комплекс жазықтық* (комплекс сандар жазықтығы), Ox өсі *нақты*, Oy өсі *жорамал өс* деп аталады (1-сурет).



1-сурет

$z=(x,\ y)$ және $\bar{z}=(x,-y)$ түйіндес сандары Ох өсіне қатысты симметриялы орналасады (2-сурет).



2-сурет

Анықтама 7. $z=(x,y)=x+iy$ санының *модулі* деп

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.5}$$

санын айтамыз.

Анықтамадан:

1) $|z|=|\bar{z}|$ болатыны;
2) z комплекс санының модулі z нүктесінен бас нүктеге дейінгі қашықтыққа немесе **z** векторының ұзындығына тең болатыны;
3) модульдері тең сандардың центрі бас нүктеде (нөл санында) орналасқан радиусы осы модульге тең шеңбердің нүктелерімен кескінделетіні шығады.

Өзара түйіндес $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ комплекс сандары үшін

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_2\cdot\bar{z}_2$$

және

$$z\cdot\bar{z}=|\,z\,|^2,$$

яғни

$$(x+i\,y)\cdot(x\text{ - }i\,y)=x^2+y^2$$

теңдіктері орынды болады.

Анықтама 8. z санының *аргументі* деп Ох өсін z санын кескіндейтін **z** векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрышты айтамыз. z санының аргументін $Arg\ z$ түрінде белгілейміз.

Ескерту: Сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бұру *бағыты оң*, ал бағыттас бағыты *теріс бағыт* деп есептелінеді.

Мысалы үшін 1-суреттегі φ бұрышы z санының оң таңбалы аргументі, ал $\varphi-2\pi$ теріс таңбалы аргументі болады. Анықтамадан, егер φ бұрышы z санының аргументі болса, онда $\varphi+2k\pi$ бұрышы k -ның кез келген бүтін мәнінде z санының аргументі болатыны және аргументтің кез келген мәнінің

$$\operatorname{Arg} z=\varphi+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

теңдігінен алынатыны шығады.

Сонымен $\operatorname{Arg} z$ шамасы шексіз көп мәнді болып шықты. Оның $(-\pi,\pi]$ аралығына тиісті мәнін *аргументтің бас мәні* деп атаймыз да $\arg z$ түрінде белгілейміз. Нәтижесінде

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

түріндегі аргументтің кез келген мәнін анықтайтын формуланы аламыз.

Егер φ бұрышы z=x+iy санының аргументі болса, онда

$$x = |z| \cos\varphi, \quad y = |z| \sin\varphi \tag{1.6}$$

болады да, z саны

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.7}$$

түрінде жазылады. z санының бұл түрі оның *тригонометриялық пішіні* деп аталады.

Кейіннен қатарлар ұғымына тоқталғанда комплекс айнымалы көрсеткіштік функциясы ұғымы енгізіліп

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.8}$$

түріндегі Эйлер формуласы беріледі.

Оның көмегімен (1.7) теңдігі

$$z = |z| e^{i\varphi} \tag{1.9}$$

түрінде жазылады. Комплекс санның бұл жазылым түрін оның *көрсеткіштік пішіні* деп атаймыз.

Қарастырылған (1.6) теңдіктерінен аргументтің бас мәнін табудың келесі формуласын аламыз:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{егер } x < 0,\ y \ge 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{егер } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

$|z_1| = |z_2|$ және $\arg z_1 = \arg z_2$ теңдіктері $z_1 = z_2$ теңдігінің белгісі болады.

Түйіндес сандар үшін

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg z = -\arg \bar{z}, \quad \text{егер } \arg z \ne 0, \pi,$$

$$\arg z = \arg \bar{z}, \quad \text{егер } \arg z = 0, \pi$$

теңдіктері орынды.

Ескерту: $z = (0, 0) = 0$ санының аргументі болмайды.